6 Wahrscheinlichkeitsrechnung

6.1 Grundbegriffe

Ziel der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Analyse einer *stochastischen* Situation. Grundlage ist die *Modellierung von Zufallsvorgängen*.

Zwei Fragen:

- **Was kann** alles passieren?
- Mit **welcher Wahrscheinlichkeit** passiert dies oder jenes?

Ein **Zufallsvorgang** führt zu einem von mehreren, sich gegenseitig ausschließenden Ergebnissen. Es ist vor der Durchführung ungewiss, welches Ergebnis tatsächlich eintreten wird.

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Zufallsvorgang, der unter kontrollierbaren Bedingungen wiederholbar ist.

Idee:
Ein „Ergebnis“ $\omega \in S$ tritt ein, zufallsgesteuert.

Die (nichtleere) Menge S **aller möglichen** Ergebnisse heißt **Ergebnisraum** oder **Ereignisraum**.

Beispiele:

Lose ziehen (auf Kirmes)

$$S = \{\text{Niete, Trostpreis, Teddy, Ferrari}\}$$

Nächstes Spiel eines Fußballvereins

$$S = \{\text{Gewinn, Niederlage, Unentschieden}\}$$

Ein Münzwurf

$$S = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\} \widehat{=} \{+1, -1\} \widehat{=} \{0, 1\}$$

Würfel

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Einarmiger Bandit

$$S = \{(z_1, z_2, z_3) | z_i \in \{\text{Glocke, Krone, Apfel}\}\}$$

2 Würfel (Monopoly, Backgammon, ...)

$$S = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), \ldots, (6,6)\}$$

Beispiele (Fortsetzung):

Ziehung der Lottozahlen
(vereinfacht, ohne Zusatzzahl)

$$S = \{\{z_1, \ldots, z_6\} | z_i \neq z_j \;\; 1 \leq z_i \leq 49\}$$

n Münzwürfe

$$S = \{\omega = (z_1, \ldots, z_n) | z_i \in \{K, Z\}\}$$

Anzahl Schadensmeldungen, die bei einer Versicherung in einem bestimmten Monat eingehen

$$S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Anzahl Unfälle auf einer bestimmten Kreuzung

$$S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Beispiele (Fortsetzung):

Pfeilwurf auf Zielscheibe (mit Radius 20cm)

$S = \{\text{alle Punkte in einer Kreisscheibe mit Radius 20cm}\}$
$\hat{=}\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 20^2\} \subset \mathbb{R}^2$

Drehen eines Glücksrads/Flaschendrehen

$S = \{\text{Winkel von 0 bis } 360^\circ\}\hat{=}[0, 360)$

„Random-Taste“ auf Ihrem Taschenrechner

$S = \{\text{Zufallszahlen im Einheitsintervall}\}\hat{=}[0, 1]$

Aktienkurs

$S = \{\text{Möglicher Tages-Verlauf der VW-Aktie morgen}\}$
$\hat{=} \{\text{Alle „Pfade“ ausgehend von heutigem Schlusskurs}\}$

Die letzten Beispiele zeigen:
Oft ist das Eintreten **jedes einzelnen** Ergebnisses sehr, sehr unwahrscheinlich (z.B.: einen festen Punkt auf der Zielscheibe treffen).

$\Rightarrow$ Diskussion von Wahrscheinlichkeiten **nicht** auf der Ebene der Ergebnisse, sondern auf der Ebene der **Ereignisse** $A \subset S$.

Eine Teilmenge A des Ergebnisraums S heißt **Ereignis**.
Wir sagen: „A tritt ein“, wenn ein Ergebnis $\omega \in A$ eintritt.

einzelnes Ergebnis $\omega \in S \Leftrightarrow$ Elementarereignis $A = \{\omega\}$

Beispiele:
Ein Münzwurf:

$$\begin{aligned} A &= \text{„Kopf liegt oben“} \\ &= \{\text{K}\} \subset S = \{\text{K,Z}\} \end{aligned}$$

1 Würfel:

$$\begin{aligned} A &= \text{„Eine 6 wird gewürfelt“} = \{6\} \subset \{1,2,3,4,5,6\} \\ B &= \text{„Eine gerade Zahl wird gewürfelt“} = \{2,4,6\} \\ C &= \text{„Mehr als 4 wird gewürfelt“} = \{5,6\} \end{aligned}$$

Beispiele (Fortsetzung):

2 Würfel:

$A =$ „Pasch gewürfelt“

$B =$ „Doppelsechs“

$C =$ „Keine 4 dabei“

Einarmiger Bandit:

$A =$ „Hauptgewinn“

$=$ {„Automat zeigt 3 Kronen“}

$=$ {(Krone,Krone,Krone)}

Glücksrad / Flaschendrehen:

$A =$ „Glücksrad bleibt in bestimmtem Sektor stehen“

$=$ „Flasche zeigt auf bestimmte Person“

$= \{\text{Winkel } \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]\}$

Zielscheibe:

$A =$ „Pfeil trifft ins Schwarze“

$= \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

$B =$ „Pfeil landet im äußeren Ring“

$= \{(x, y) | 18^2 < x^2 + y^2 \leq 20^2\}$

Beispiele (Fortsetzung):

Schadensmeldungen / Unfälle:

$$\begin{aligned} A &= \text{„kein Schaden“} \\ &= \{0\} \subset \mathbb{N} \\ B &= \text{„höchstens 4 Schäden“} \\ C &= \text{„Mehr als 100 Schäden“} \end{aligned}$$

Aktienkurs:

$$\begin{aligned} A &= \text{„Schlusskurs ist größer als Ausgangskurs“} \\ B &= \text{„mehr als 3\% zugelegt“} \end{aligned}$$

6.2 Mengen und Ereignisse

$x \in A$: „x ist ein **Element** der Menge A“.
$x \notin A$: „x ist kein **Element** der Menge A“.

$A \subset B$: A ist **Teilmenge** von B; $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Die **Schnittmenge** $A \cap B$ ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B sind;
$A \cap B = \{x : x \in A \text{ **und** } x \in B\}$

Die **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ ist die Menge aller Elemente, die in A oder B sind;
$A \cup B = \{x : x \in A \textbf{ oder } x \in B\}$.

Die **Differenzmenge** $A \backslash B$ ist die Menge aller Elemente, die in A aber nicht in B sind;
$A \backslash B = \{x : x \in A \textbf{ und } x \notin B\}$.

Für $A \subset S$ ist die **Komplementärmenge** $\bar{A}$ von A bzgl S die Menge aller Elemente von S, die nicht in A sind. (Andere Notation: $A^c, \complement A$.)

Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(S)$ ist die Menge aller Teilmengen von S; $\mathcal{P}(S) = \{M | M \subset S\}$.

Die **Mächtigkeit (Kardinalität) von** S ist die Anzahl der Elemente in S; $\#S = \#\{x : x \in S\}$.

Rechenregeln für Mengen

(Veranschaulichung im Venn-Diagramm)

- Kommutativgesetz:
  $A \cap B = B \cap A$
  $A \cup B = B \cup A$

- Assoziativgesetz:
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

- Distributivgesetz:
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

- De Morgansche Regeln:
  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
  $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

- Aus $A \subset B$ folgt $\bar{B} \subset \bar{A}$.

- Für die Differenzmenge $A \backslash B$ gilt:
  $A \backslash B = A \cap \bar{B}$.

Ein Ereignis ist jede beliebige Teilmenge des Ereignisraumes

Beispiel:

Zufallsexperiment: einmaliges Werfen eines Würfels

Ereignis A: “Werfen einer geraden Augenzahl”
$\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$

Sicheres Ereignis S

Ereignis, das als Ergebnis des Zufallsexperiments eintreten muß

Unmögliches Ereignis $\emptyset$

Ereignis, das im Ergebnis des Zufallsexperimentes auf keinen Fall eintreten kann

Komplementärereignis

Menge sämtlicher Elementarereignisse des Ereignisraumes S, die nicht im betrachteten Ereignis enthalten sind

A Ereignis
$\bar{A}$ Komplementärereignis zu A

$\bar{S} = \emptyset$

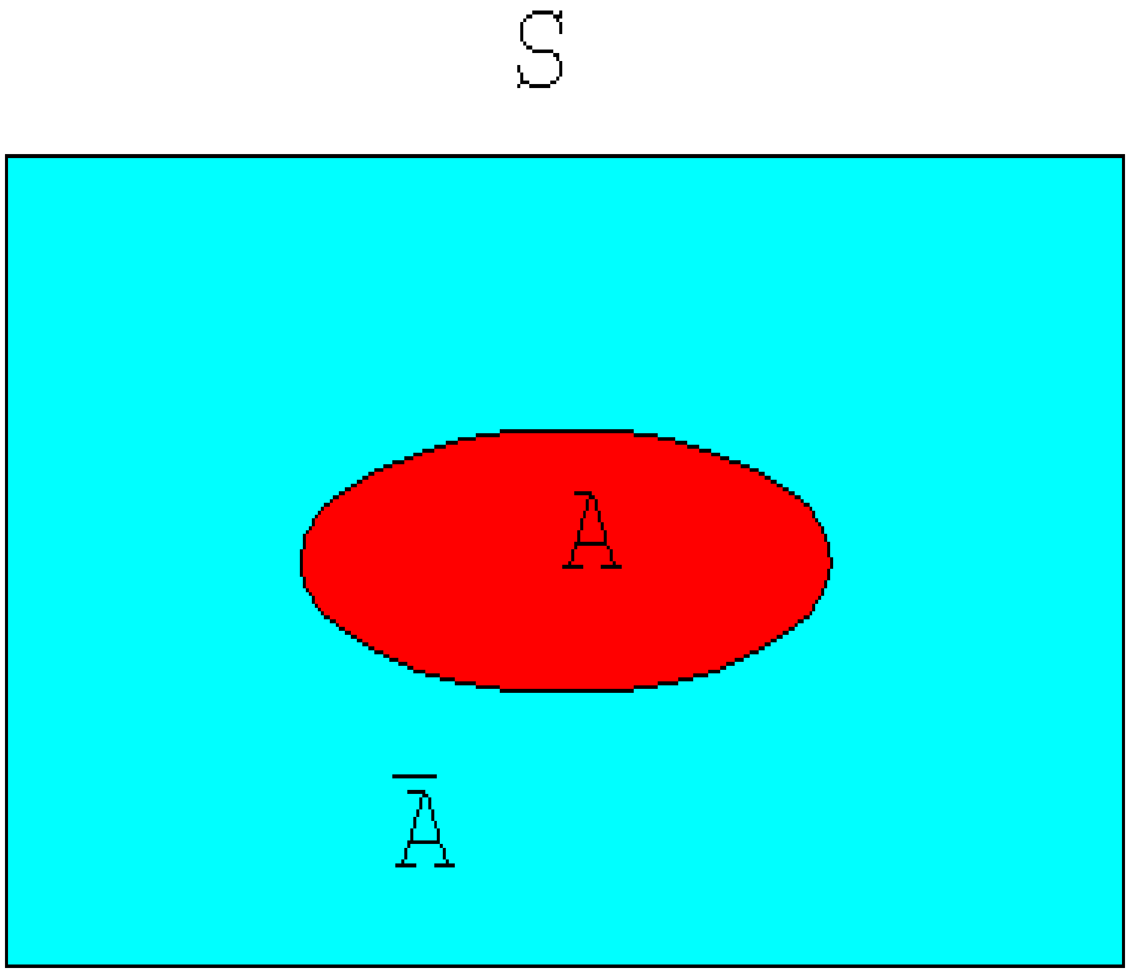
Beispiel:

Zufallsexperiment: einmaliges Werfen eines Würfels

Ereignis A: "Werfen einer geraden Augenzahl"

$A = \{2, 4, 6\}$
$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$

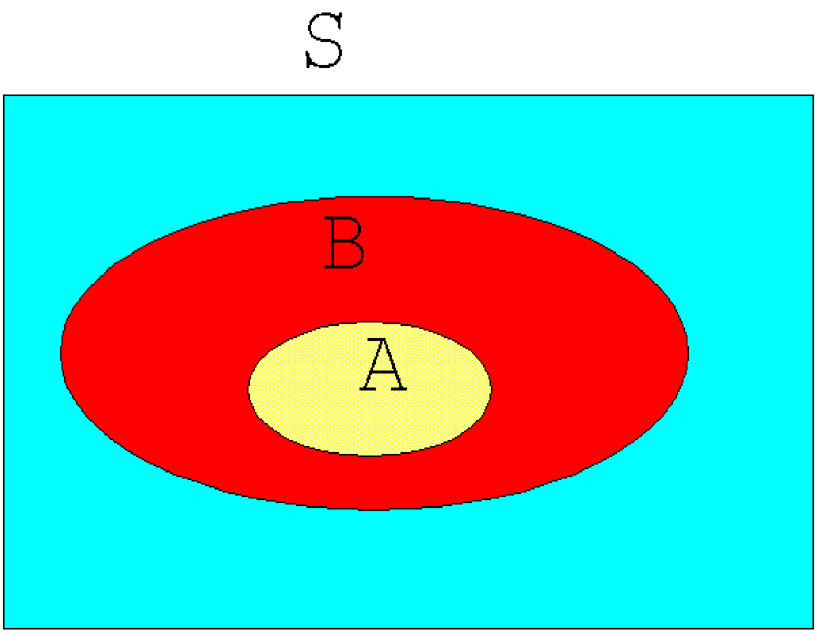
Venn-Diagramm:



Relationen und Operationen von Ereignissen

A zieht B nach sich: $A \subset B$

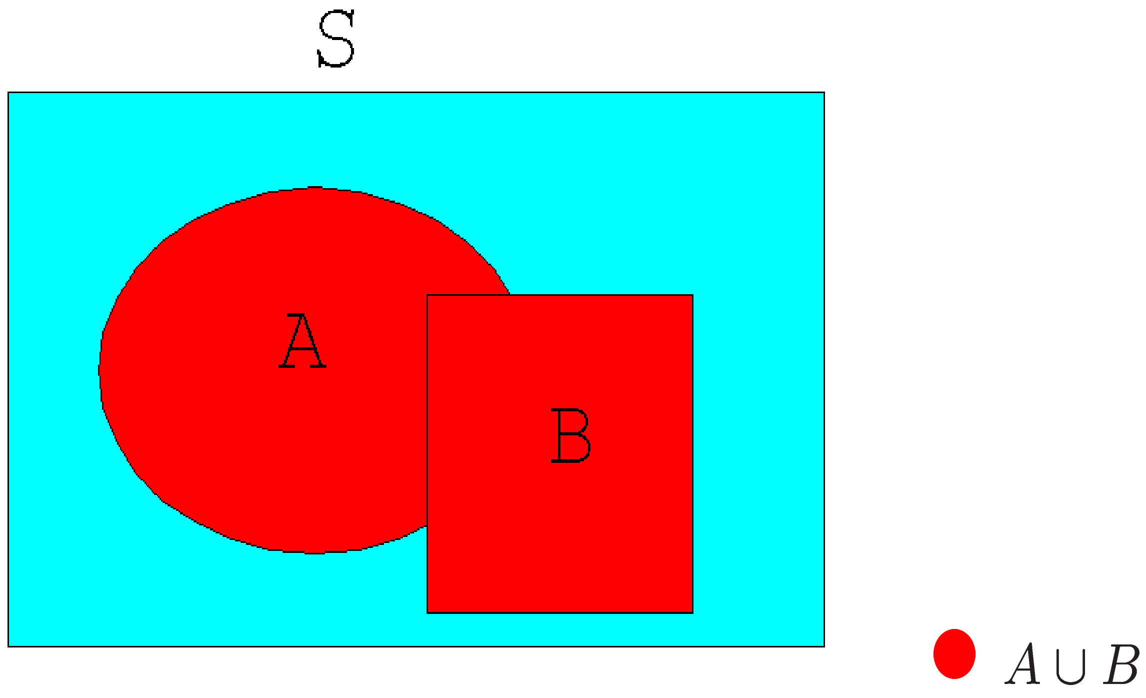
Wenn bei der Realisierung gegebener Bedingungen, bei der das Ereignis A eintritt, stets auch das Ereignis B eintritt, so sagt man A zieht B nach sich. A ist eine Teilmenge von B.



- A und B sind gleichwertig (äquivalent), wenn $A \subset B$ und $B \subset A$: $A \equiv B$

Vereinigung von Ereignissen (logische Summe)

Die Vereinigung zweier Ereignisse A und B ist die Menge aller Elementarereignisse, die zu A oder B gehören: $A \cup B = C$



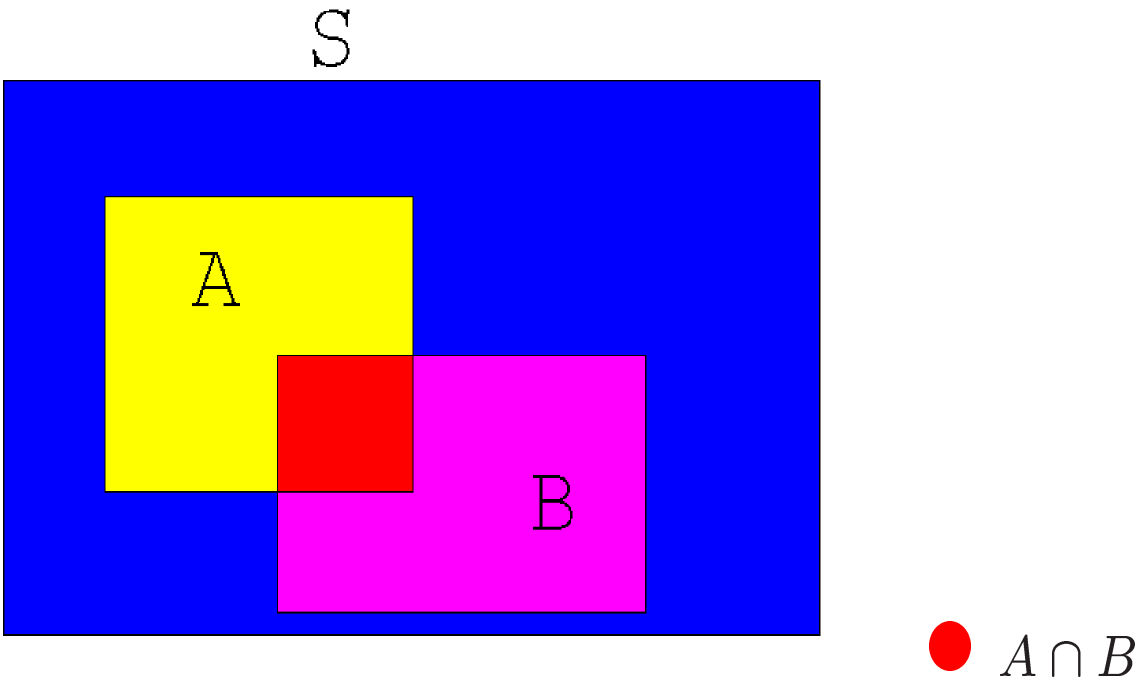
Verallgemeinerung

Ereignisse: $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Durchschnitt von Ereignissen

Der Durchschnitt von A und B ist die Menge aller Elementarereignisse, die sowohl zu A als auch zu B gehören: $A \cap B = C$



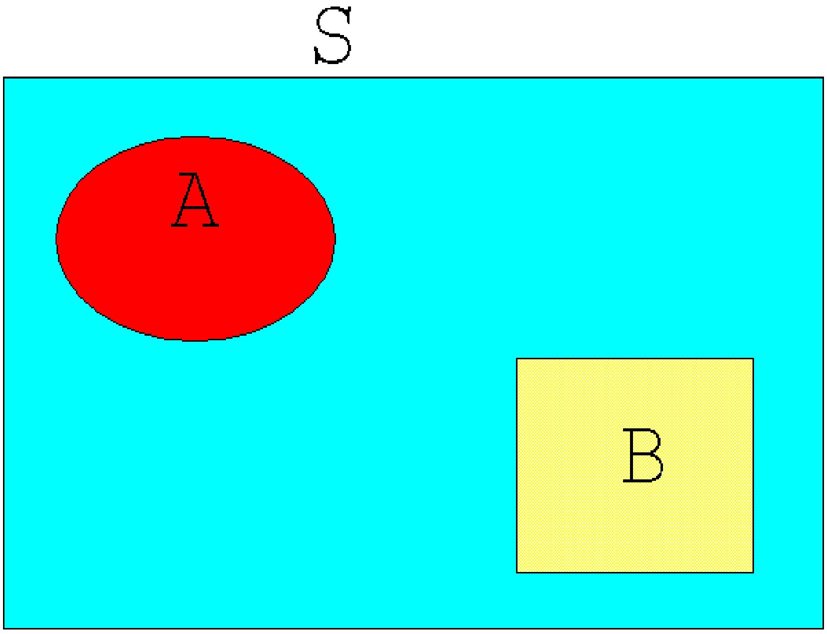
Verallgemeinerung

Ereignisse: $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Disjunkte Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B heißen disjunkt, wenn ihr gleichzeitiges Eintreten unmöglich ist:
$A \cap B = \emptyset$

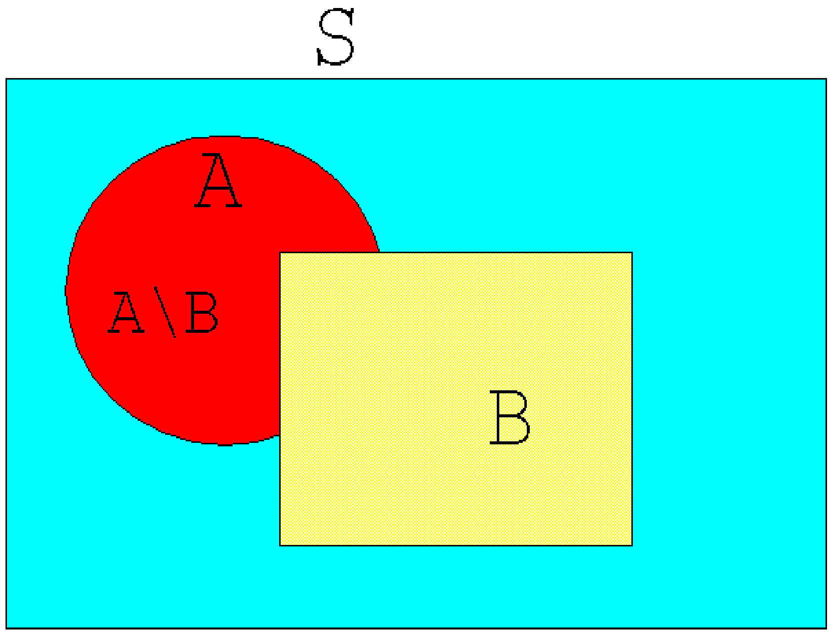


Stets disjunkt:

- A und $\bar{A}$: $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- A und $\emptyset$: $\emptyset \cap A = \emptyset$

Logische Differenz von Ereignissen

Ereignis C, das darin besteht, daß das Ereignis A eintritt, während das Ereignis B nicht eintritt:
$A \backslash B = C = A \cap \bar{B}$



Beispiel:

Zufallsexperiment: einmaliges Werfen eines Würfels

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$

$\Rightarrow A \backslash B = C = \{1, 2\}$, $B \backslash A = \{4\}$

Zerlegung des Ereignisraumes S

> Ein System von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißt eine Zerlegung von S, wenn die Relationen
> - $A_i \neq \emptyset$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$
> - $A_i \cap A_k = \emptyset$, für $i \neq k$, disjunkt
> - $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$
>
> gelten und eines der Ereignisse bei einem Zufallsexperiment eintreten muß

Beispiel:

Zufallsexperiment: Werfen eines Würfels

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\begin{array}{lll} A_1 = \{1\} & A_2 = \{3, 4\} & A_3 = \{1, 3, 4\} \\ A_4 = \{5, 6\} & A_5 = \{2, 5\} & A_6 = \{6\} \end{array}$$

Zerlegung von S: A_1, A_2, A_5, A_6

$$\begin{array}{lll} A_1 \cap A_2 = \emptyset & A_1 \cap A_5 = \emptyset & A_1 \cap A_6 = \emptyset \\ A_2 \cap A_5 = \emptyset & A_2 \cap A_6 = \emptyset & A_5 \cap A_6 = \emptyset \end{array}$$

$A_1 \cup A_2 \cup A_5 \cup A_6 = S$

Zerlegung des Ereignisraumes S

> Ein System von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißt eine Zerlegung von S, wenn die Relationen
> - $A_i \neq \emptyset$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$
> - $A_i \cap A_k = \emptyset$, für $i \neq k$, disjunkt
> - $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$
>
> gelten und eines der Ereignisse bei einem Zufalls-experiment eintreten muß

Beispiel:

Zufallsexperiment: Werfen eines Würfels

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\begin{array}{lll} A_1 = \{1\} & A_2 = \{3,4\} & A_3 = \{1,3,4\} \\ A_4 = \{5,6\} & A_5 = \{2,5\} & A_6 = \{6\} \end{array}$$

Zerlegung von S: A_1, A_2, A_5, A_6

$$\begin{array}{lll} A_1 \cap A_2 = \emptyset & A_1 \cap A_5 = \emptyset & A_1 \cap A_6 = \emptyset \\ A_2 \cap A_5 = \emptyset & A_2 \cap A_6 = \emptyset & A_5 \cap A_6 = \emptyset \end{array}$$

$A_1 \cup A_2 \cup A_5 \cup A_6 = S$

Zusammenfassung

Beschreibung des zugrundeliegenden Sachverhaltes	Bezeichnung (Sprechweise)	Darstellung
• A tritt sicher ein	A ist sicheres Ereignis	$A = S$
• A tritt sicher nicht ein	A ist unmögliches Ereignis	$A = \emptyset$
• wenn A eintritt, tritt B ein	A ist Teilmenge von B	$A \subset B$
• genau dann, wenn A eintritt, tritt B ein	A und B sind äquivalente Ereignisse	$A \equiv B$
• wenn A eintritt, tritt B nicht ein	A und B sind disjunkte Ereignisse	$A \cap B = \emptyset$
• genau dann, wenn A eintritt, tritt B nicht ein	A und B sind komplementäre Ereignisse	$B = \bar{A}$
• genau dann, wenn mindestens ein A_i eintritt (genau dann, wenn A_1 oder A_2 oder ... eintritt), tritt A ein	A ist Vereinigung der A_i	$A = \bigcup_i A_i$
• genau dann, wenn alle A_i eintreten (genau dann, wenn A_1 und A_2 und ... eintreten), tritt A ein	A ist Durchschnitt der A_i	$A = \bigcap_i A_i$

6.3 Wahrscheinlichkeiten

Vor der Durchführung eines Zufallsvorgangs ist es ungewiss, welches Ereignis eintritt. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird nun die Chance für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses $A \subset S$ durch eine Zahl, die **„Wahrscheinlichkeit“** $P[A]$, bewertet.

Problem: Wie kommt man zu Wahrscheinlichkeiten?

1) Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff (Laplace-Wahrscheinlichkeiten)

Bei „fairen“Würfeln, Glücksrädern, Münzen, Lotto-Ziehungsgeräten, etc., gilt

- $S = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ ist endlich
- Alle Ergebnisse sind gleichwahrscheinlich

$\Rightarrow$ Die **Wahrscheinlichkeit von** $A \subset S$ ergibt sich durch Abzählen:

$$P[A] = \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse in } A}{\text{Anzahl der Elementarereignisse in } S}$$

Beispiel: Würfel, $A =$”gerade Augenzahl

$$\Rightarrow P[A] = 3/6 = 1/2$$

2) Objektiver (statistischer) Wahrscheinlichkeitsbegriff

Wahrscheinlichkeiten ergeben sich als Grenzwert der relativen Häufigkeit eines Ereignisses $A \subset S$

- n-malige Wiederholung des interessierenden Zufallsexperiments $\Rightarrow$ relative Häufigkeit $f_n(A)$
- Feststellung: Für $n \to \infty$ stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten erfahrungsgemäß um einen festen Wert. Dieser Wert entspricht der **Wahrscheinlichkeit** $P[A]$

Beispiel: $n = 100, 1000, 10000, \dots$ mal würfeln. Bei einem fairen Würfel stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten von $A =$„gerade Augenzahl“ um $P[A] = 1/2$.

3) Subjektive Wahrscheinlichkeiten

Subjektive Wahrscheinlichkeiten geben persönliche Einschätzungen wider.

Beispiele: Ihre Einschätzung der Chance, die Klausur Statistik II zu bestehen; Konjunkturprognose durch einen Sachverständigen

1. Beispiel:

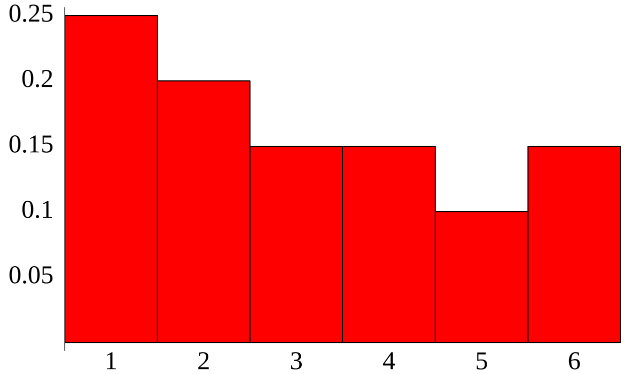
Stabilisierung der relativen Häufigkeiten beim wiederholten Wurf einer fairen Münze.

n	h(„Kopf")	f(„Kopf")
10	7	0,700
20	11	0.550
40	17	0,425
60	24	0,400
80	34	0,425
100	47	0,470
200	92	0,460
400	204	0,510
600	348	0,580
800	404	0,505
1000	492	0,492
2000	1010	0,505
3000	1530	0,510
4000	2032	0,508
5000	2515	0,503

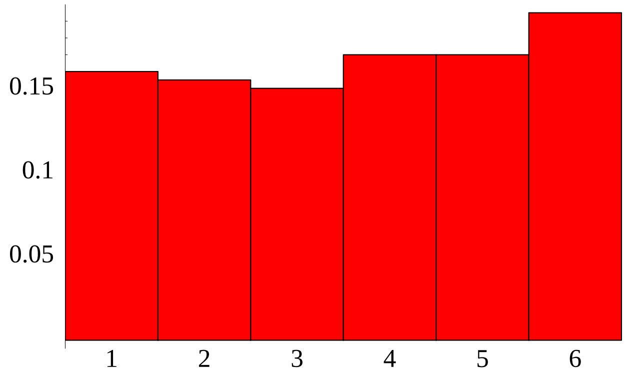
2. Beispiel:

Stabilisierung der relativen Häufigkeiten beim wiederholten Wurf eines fairen Würfels.

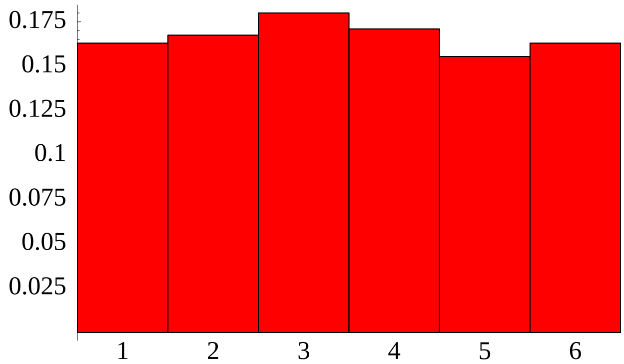
$n = 20$ Würfe



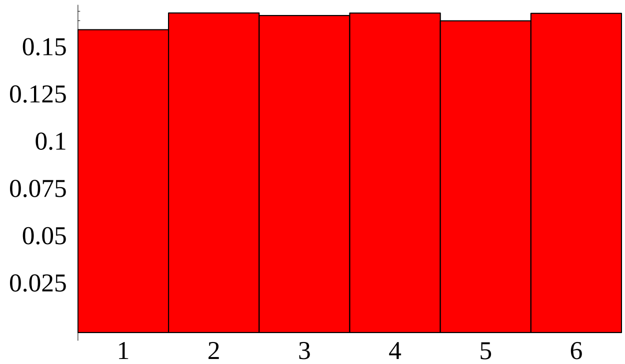
$n = 200$ Würfe



$n = 2.000$ Würfe



$n = 20.000$ Würfe



3. Beispiel:

Man betrachte ein Land mit $N = 82.000.000$ Bürgerinnen und Bürgern.

- 41.820.000 Frauen $\Rightarrow$ Anteil = 51%
- 40.180.000 Männer $\Rightarrow$ Anteil = 49%
- Zufallsexperiment: Ziehen eines zufällig ausgewählten Individuums ($\Rightarrow$ 82.000.000 mögliche Elementarereignisse

Frage: Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A („Frau“)?

$$P[A] = \frac{41.820.000}{82.000.000} = 0.51$$

Wiederholtes Ziehen von $n = 10, 100, 1000, ...$ Individuen: Mit wachsendem n nähert sich $f_n(A)$ immer stärker der Wahrscheinlichkeit $P[A]$ an.

Vollerhebung: $f_N(A) = P[A]$

6.4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Ziel: *Unabhängig* von der Art des Wahrscheinlichkeitsbegriffs entwickeln wir einen Apparat, mit dem wir die Ausgänge eines Zufallsvorgangs quantifizieren können. *Wir legen hier nur fest, welche Eigenschaften Wahrscheinlichkeiten haben müssen und wie wir mit ihnen rechnen dürfen.*

Jede „sinnvolle“ Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse $A, B \subset S$ besitzt z.B. folgenden Eigenschaften:
$0 \leq P[A] \leq 1$
$P[S] = 1$
$A \subset B \Rightarrow P[A] \leq P[B]$
$P[\bar{A}] = 1 - P[A]$
$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$, falls A und B nicht gleichzeitig eintreten können.

Die von Wahrscheinlichkeiten zu fordernden Eigenschaften sind in den „Axiomen“ des russischen Mathematikers Kolmogoroff zusammengefasst.

Alle zum Umgang mit Wahrscheinlichkeiten wichtigen Rechenregeln lassen sich aus diesen Axiomen ableiten.

Gegeben: Diskreter Ereignisraum $S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

Ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** P ist eine Abbildung, die allen Ereignissen A eines Zufallsvorgangs eine Zahl $P[A]$ zuordnet, und die folgenden Bedingungen (Eigenschaften, Axiome) genügt:

Axiom 1:
Die Wahrscheinlichkeit $P[A]$ eines Ereignisses A ist eine eindeutig bestimmte Zahl mit

$$0 \leq P[A] \leq 1 \quad \text{(Nichtnegativität)}$$

Axiom 2:

$$P[S] = 1 \quad \text{(Normierung)}$$

Axiom 3: (Additivität)
Sind $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ paarweise disjunkt, dann gilt Für disjunkte Ereignisse ($A \cup B = \emptyset$) gilt

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \ldots] = P[A_1] + P[A_2] + \ldots + P[A_k] + \ldots$$

$(S, \mathcal{P}[S], P)$ heißt dann ein (diskreter) **Wahrscheinlichkeitsraum** und P heißt (diskrete) **Wahrscheinlichkeitsverteilung**.

Falls S endlich ist, $S = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$, sprechen wir von einem **endlichen Wahrscheinlichkeitsraum**.

S : „Was kann alles passieren?"
genauer: „Welche Ereignisse sind modelliert?"

P : „Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten die Ereignisse ein?"

Rechenregeln:

- $P[S] = 1$, $P[\emptyset] = 0$
- $P[A] \leq P[B]$, falls $A \subset B$
- $P[\bar{A}] = 1 - P[A]$ mit $\bar{A} = S \backslash A$
- $P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k] = P[A_1] + P[A_2] + \ldots + P[A_k]$, falls $A_1, A_2, \ldots, A_k$ paarweise disjunkt
- $P[A \backslash B] = P[A] - P[A \cap B]$
- Additionssatz:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

Beispiele:

1. Fairer Würfel:

- Elementarwahrscheinlichkeiten:

$$p_1 = P[\{1\}] = \frac{1}{6} = p_2 = \cdots = p_6$$

- Wahrscheinlichkeit eine gerade Zahl zu würfeln:

$$\begin{aligned} P[\text{„Gerade Zahl"}] &= P[\{2,4,6\}] \\ &= p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Wahrscheinlichkeit eine ungerade Zahl zu würfeln:

$$\begin{aligned} P[\text{„Ungerade Zahl"}] &= P[\{1,3,5\}] \\ &= p_1 + p_3 + p_5 = \frac{1}{2} \\ &= 1 - P[\text{„Gerade Zahl"}] \end{aligned}$$

- Wahrscheinlichkeit mehr als 4 zu würfeln:

$$\begin{aligned} P[\text{„Mehr als 4"}] &= P[\{5,6\}] \\ &= p_5 + p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. Gefälschter Würfel:

- Elementarwahrscheinlichkeiten:

$$p_1 = \frac{1}{12}, p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{6}, p_6 = \frac{1}{4}$$

- Wahrscheinlichkeit eine gerade Zahl zu würfeln:

$$\begin{aligned} P[\text{„Gerade Zahl“}] &= P[\{2,4,6\}] \\ &= p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

- Wahrscheinlichkeit eine ungerade Zahl zu würfeln:

$$\begin{aligned} P[\text{„Ungerade Zahl“}] &= P[\{1,3,5\}] \\ &= p_1 + p_3 + p_5 = \frac{5}{12} \\ &= 1 - P[\text{„Gerade Zahl“}] \end{aligned}$$

- Wahrscheinlichkeit mehr als 4 zu würfeln:

$$\begin{aligned} P[\text{„Mehr als 4“}] &= P[\{5,6\}] \\ &= p_5 + p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

3. Warten auf die erste Zahl beim wiederholten Wurf einer fairen Münze:

- Elementarwahrscheinlichkeiten:
  $P[$„Zahl im 1. Versuch“$] = \frac{1}{2} =: p_1$
  $P[$„Zahl erst im 2. Versuch“$] = \frac{1}{4} =: p_2$
  $P[$„Zahl erst im 3. Versuch“$] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} =: p_3$
  $P[$„Zahl erst im $k$ten Versuch“$] = \left(\frac{1}{2}\right)^k =: p_k$

  Probe:

  $$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \quad \text{(Geometr. Reihe)}$$

- Wahrscheinlichkeit für eine gerade Anzahl von Versuchen:
  $P[$„Gerade Anzahl Versuche“$]$

  $$= p_2 + p_4 + p_6 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

- Wahrscheinlichkeit für eine ungerade Anzahl von Versuchen:
  $P[$„Ungerade Anzahl Versuche“$]$

  $$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = p_1 + p_3 + p_5 + \cdots$$

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Wenn der Grundraum nicht diskret ist, können die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen nicht mehr durch Summieren von Elementarwahrscheinlichkeiten berechnet werden.

Betrachtet man z.B. den Pfeilwurf auf eine Zielscheibe, so ist *die Trefferwahrscheinlichkeit für jeden fest gewählten, einzelnen Punkt der Scheibe gleich 0.* Damit kann die Wahrscheinlichkeit für „einen Treffer ins Schwarze“ nicht als Summe der Elementarwahrscheinlichkeiten aller Punkte „im Schwarzen“ erhalten werden.

Anmerkung: Bei nicht diskreten Räumen ist weiterhin zu beachten, dass es aus mathematischen Gründen nicht möglich ist, allen denkbaren Mengen $A \subset S$ Wahrscheinlichkeiten zuzuweisen und gleichzeitig zu verlangen, dass die Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten weiter gelten. Als Ausweg betrachtet man eine Kollektion von Mengen, die abgeschlossen ist unter mengentheoretischen Operationen („σ-Algebra“). Nur noch den in der Kollektion enthaltenen Ereignissen wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Alle in der Praxis relevanten Mengen wie z.B. Intervalle, Quadrate, Rechtecke, Kreise, Kreissektoren, Kreisringe, usw., sind i. Allg. in einer solchen Kollektion enthalten.

6.5 Laplace-Modell

Annahmen im Laplace-Modell:

- S endlich, $S = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$
- Alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich

$\Rightarrow$ Elementarwahrscheinlichkeiten:

$$p_k = P[\{\omega_k\}] = \frac{1}{N} = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } k = 1, \ldots, N$$

$\Rightarrow$ Berechnung der Wahrscheinlichkeit von A:

$$\begin{aligned} P[A] &= \sum_{\omega_k \in A} p_k = \#\{\omega_k | \omega_k \in A\} \cdot \frac{1}{N} \\ &= \frac{\#\{\omega_k | \omega_k \in A\}}{\#S} \\ &= \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller Fälle}} \end{aligned}$$

Beispiele: Fairer Würfel, faire Münze.

2 faire Würfel: $P[\text{„Pasch“}] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Kompliziertere Modelle (z.B. Wahrscheinlichkeit fuer 3,4,5,6 Richtige beim Lotto)
$\Rightarrow$ geschicktes Abzählen: **Kombinatorik**.

6.6 Zufallsstichproben und Kombinatorik

Gegeben: Grundgesamtheit bestehend aus N Elementen $\{e_1, \dots, e_N\}$

Beispiele: Urne bestehend aus 49 Kugeln (Lottozahlen), Gesamtheit aller Studenten in Bonn,...

Wir betrachten nun Stichproben, die durch zufällige Ziehung von n Elementen der Grundgesamtheit entstehen

Beispiele: Ziehung der Lottozahlen, Erstellung einer Zufallsstichprobe von Bonner Sudenten zu statistischen Zwecken

In vielen Fällen interessiert man sich dabei für die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Stichprobe zu ziehen. Diese hängt ab von der Gesamtzahl der möglichen Stichproben *in Abhängigkeit von der Art und Weise des Ziehungsvorgangs.* und erfordert die Anwendung von **kombinatorischen Überlegungen**.

Modell mit Zurücklegen

Grundgesamtheit aus N Elementen; n voneinander unabhängige Ziehungen jeweils eines zufälligen Elements (nach jeder Ziehung wird das gezogene Element wieder in die Grundgesamtheit zurückgelegt).

Anzahl der möglichen Stichproben: N^n

Grundgesamtheit aus $N = 3$ Elementen $\{a, b, c\}$
Stichproben des Umfangs $n = 2$: $\{a, a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, a\}$, $\{b, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$, $\{c, b\}$, $\{c, c\}$

Jede dieser Stichproben wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit (1/9) gezogen

Stichproben, die durch unabhängiges Ziehen mit Zurücklegen aus einer Grundgesamtheit entstehen, heißen **einfache Zufallsstichproben**.

Die Antwort auf die Frage des Chevalier de Méré:

Was ist wahrscheinlicher: Aus 4 Würfen mindestens eine „6“ oder aus 24 Würfen mindestens eine „Doppelsechs“ zu erhalten?

Fall 1: Mindestens eine 6 aus 4 Würfen

- Gesamtzahl aller möglichen Stichproben (= Ergebnisse der 4 Würfe): 6^4
- Gesamtzahl aller möglichen Stichproben (= Ergebnisse der 4 Würfe), die keine 6 enthalten: 5^4

$$\Rightarrow P[\text{„mindestens eine 6 aus 4 Würfen“}]$$

$$= 1 - P[\text{„keine 6 aus 4 Würfen“}]$$

$$= 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0,5177$$

Analog: $P[\text{„mindestens eine Doppelsechs aus 24 Würfen“}]$

$$= 1 - P[\text{„keine Doppelsechs aus 24 Würfen“}]$$

$$= 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0,4914$$

(An der kleinen Differenz der Wahrscheinlichkeiten sieht man, dass der Chevalier de Meré ein äußerst eifriger Spieler gewesen sein muss, um den Unterschied am Spieltisch wahrzunehmen.)

Modell ohne Zurücklegen

Grundgesamtheit aus N Elementen; n aufeinanderfolgende Ziehungen jeweils eines zufälligen Elements. Nach jeder Ziehung wird das gezogene Element **nicht** wieder in die Grundgesamtheit zurückgelegt).

Grundgesamtheit aus $N = 3$ Elementen $\{a, b, c\}$
6 Stichproben des Umfangs $n = 2$ bei Ziehen ohne Zurücklegen: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, a\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$, $\{c, b\}$

Jede dieser Stichproben ist gleichwahrscheinlich (1/6)
.

Anmerkung: Beim Modell ohne Zurücklegen sind die einzelnen Ziehungen nicht unabhängig voneinander; das Resultat einer Ziehung beeinflusst die möglichen Ergebnisse jeder weiteren Ziehung

Modell ohne Zurücklegen

Anzahl der möglichen Stichproben vom Umfang n:

$$N \cdot (N-1) \cdot (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Fakultät

Die Fakultät einer natürlichen Zahl k ist definiert durch

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Es gilt

$$1! = 1, \qquad 0! = 1$$

Beispiele:

$2! = 2$

$3! = 6$

$4! = 24$

$10! = 3628800$

$20! = 2432902008176640000$

Permutationen

Grundgesamtheit aus N Elementen; durch N-maliges zufälliges Ziehen ohne Zurücklegen werden nacheinander **alle** Elemente der Grundgesamtheit gezogen.
Die resultierenden Stichproben (Permutationen) unterscheiden sich nur in der **Reihenfolge** der Elemente.

Anwendungsbeispiel: Auslosung der Startreihenfolge bei einem Sportereignis mit N teilnehmenden Sportlern.

$N = 3$ Elementen $\{a, b, c\}$ 6 mögliche Permutationen:
$\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{c, b, a\}$

Jede Permutation ist gleichwahrscheinlich (1/6)

Anzahl möglicher Permutationen bei N Objekten:

$$N!$$

Modell ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Grundgesamtheit aus N Elementen; durch zufälliges Ziehen ohne Zurücklegen werden nacheinander n Elemente gezogen.
Keine Berücksichtigung der Reihenfolge; zwei Stichproben sind äquivalent, wenn sie die gleichen Elemente entahlten.

Anzahl der möglichen Stichproben vom Umfang n (jeweils gleichwahrscheinlich):

$$\binom{N}{n}$$

Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient $\binom{N}{n}$ ist definiert als

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)! \cdot n!}$$

Es gilt

$$\binom{N}{0} = 1, \binom{N}{1} = N, \binom{N}{N} = 1,$$
$$\binom{N}{n} = 0 \text{ falls } N < n$$

Anwendungsbeispiel: Ziehung der Lottozahlen.

Bei der Ziehung der Lottozahlen handelt es sich um ein Beispiel für ein Modell ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Die Stichprobe

$$4, 7, 11, 13, 26, 28$$

wird nicht unterschieden von der Ziehung

$$11, 26, 13, 28, 4, 7$$

Es gibt also

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{(43)! \cdot 6!} = 13983816$$

Möglichkeiten 6 Lottozahlen aus 49 Kugeln zu ziehen

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte (getippte) Kombination die richtige ist:

$$P[\text{"6 Richtige"}] = \frac{1}{13983816} = 0,000000072$$

Wahrscheinlichkeit für $3, 4, 5, 6$ Richtige?

Modell ohne Zurücklegen, Reihenfolge irrelevant

$\Rightarrow$ alle Ziehungen gleichwahrscheinlich

$\Rightarrow$ Laplace-Modell

$$P[\text{„6 Richtige“}] = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816} \approx 0,000000072$$

$$\begin{aligned} P[\text{„3 Richtige“}] &= \frac{\#\{\text{„3 Richtige und 3 Falsche“}\}}{\#\{\text{Alle möglichen Tipps}\}} \\ &= \frac{\binom{6}{3}\binom{49-6}{6-3}}{\binom{49}{6}} = \ldots \\ P[\text{„}k\text{ Richtige“}] &= \frac{\#\{\text{„}k\text{ Richtige und }6-k\text{ Falsche“}\}}{\#\{\text{Alle möglichen Tipps}\}} \\ &= \frac{\binom{6}{k}\binom{49-6}{6-k}}{\binom{49}{6}} \end{aligned}$$

Anmerkungen:

In der Sprache der Kombinatorik werden Zusammenstellungen (Ziehungen) von n Elementen, die sich *unter Berücksichtigung* der Reihenfolge ergeben, als **Variationen** bezeichnet

Zusammenstellungen (Ziehungen) von n Elementen, die *ohne* Berücksichtigung der Reihenfolge ergeben, werden **Kombinationen** genannt

Anzahl Stichproben beim Modell **mit** Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (Kombination mit Wiederholung):

$$\binom{N+n-1}{n}$$

Vorsicht: Stichproben **nicht** gleichwahrscheinlich

6.7 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

Bei manchen Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet man das Eintreten von Ereignissen in Abhängigkeit von bestimmten anderen Ereignissen.

Beispiel: Ein Unternehmen stellt 2000 Teile auf zwei Maschinen her.

- 1400 Teile werden auf Maschine 1 hergestellt. Davon sind 1162 Teile fehlerfrei.
- 600 Teile werden auf Maschine 2 produziert. Hiervon sind 378 Teile fehlerfrei.

$$A = \{\text{Teil ist fehlerfrei}\}$$
$$B = \{\text{Teil auf Maschine 1 hergestellt}\}$$
$$C = \{\text{Teil auf Maschine 2 hergestellt}\}$$

	fehlerfrei $= A$	mit Fehlern $= \bar{A}$	
Maschine 1 $= B$	1162	238	1400
Maschien 2 $= C$	378	222	600
	1540	460	2000

$$P[A] = \frac{1540}{2000} = 0,77$$
$$P[B] = \frac{1400}{2000} = 0,7$$
$$P[A \cap B] = \frac{1162}{2000} = 0,581$$

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig entnommenes fehlerfreies Teil auf Maschine 1 hergestellt wurde?

$$P[B|A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} = \frac{0,581}{0,77} = 0.7545$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wollen definieren: Wahrscheinlichkeit von A, angenommen B tritt ein. (B ist „neuer“ Grundraum)

Bezeichnung: $P[A|B]$

DEFINITION: [BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT]
Man betrachte Ereignisse $A, B \subset S$ mit $P[B] > 0$.
Die **bedingte Wahrscheinlichkeit von** A **gegeben** B wird definiert durch

$$P[A|B] := \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

$P[\cdot|B]$ als Funktion der Ereignisse A heisst bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung bzgl B.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten sind wiederum Wahrscheinlichkeiten im Sinne der Axiome von Kolmogoroff (alle Rechenregeln für „normale“ Wahrscheinlichkeiten sind erfüllt).

Unabhängigkeit

DEFINITION: [UNABHÄNGIGE EREIGNISSE]
Ein Ereignis A ist dann von einem Ereignis B **stochastisch unabhängig**, wenn das Eintreten des Ereignisses A von dem Eintreten oder Nichteintreten des Ereignisses B nicht abhängt.

$$P[A|B] = P[A] \qquad P[B|A] = P[B]$$
$$P[A \cap B] = P[A]\,P[B]$$

BEMERKUNG: unabhängig ist nicht gleichbedeutend mit disjunkt

BEISPIEL:
Zwei Ereignisse: A und B mit $P[A] > 0$, $P[B] > 0$

$$P[A \cap B] = \emptyset \Rightarrow P[A \cap B] = 0$$
aber: $P[A \cap B] = 0 \neq P[A]\,P[B]$

Beispiel 1:

Zweimaliges Werfen eines Würfels

$A = \{$„Im ersten Wurf eine 6“$\}$
$B = \{$„Im zweiten Wurf eine 6“$\}$

$$P[B|A] = P[B] = \frac{1}{6}, \qquad A \text{ und } B \text{ sind unabhängig}$$

Beispiel 2: Augenfarbe und Intelligenz

$A = \{$„Hohe Intelligenz“$\}$, $B = \{$„Blaue Augen“$\}$

Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten in einer Population:

$IQ \backslash$Augen	B (blau)	$\bar{B}$ (nicht blau)	Summe
A	$P[A \cap B] = 0.1$	$P[A \cap \bar{B}] = 0.4$	$P[A] = 0.5$
$\bar{A}$	$P[\bar{A} \cap B] = 0.1$	$P[\bar{A} \cap \bar{B}] = 0.4$	$P[\bar{A}] = 0.5$
Summe	$P[B] = 0.2$	$P[\bar{B}] = 0.8$	$P[S] = 1$

$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] = 0.1,$
$P[\bar{A} \cap \bar{B}] = P[\bar{A})] \cdot P[\bar{B}] = 0.4$
$\Rightarrow$ A und B sind unabhängig,

Verallgemeinerung auf mehr als zwei Ereignisse

MULTIPLIKATIONSSATZ:
Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$

$$\begin{aligned} P[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = P[A_1)] \cdot P[A_2|A_1] \\ \cdot P[A_3|A_1 \cap A_2] \cdots \\ \cdot P[A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}] \end{aligned}$$

UNABHÄNGIGKEIT:
Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen stochastisch unabhängig, wenn für **jede Auswahl** $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ mit $m \leq n$ gilt

$$P[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}] = P[A_{i_1}] \cdot P[A_{i_2}] \cdots P[A_{i_m}]$$

6.8 Totale Wahrscheinlichkeit und das Theorem von Bayes

Beispiel: [Weinkeller]

- Qualitätswein, Kabinett, Spätlese: 5:3:2
- Weißweinanteil: 1/5, 1/3 bzw. 1/4

Wahrscheinlichkeit für Weinsorten

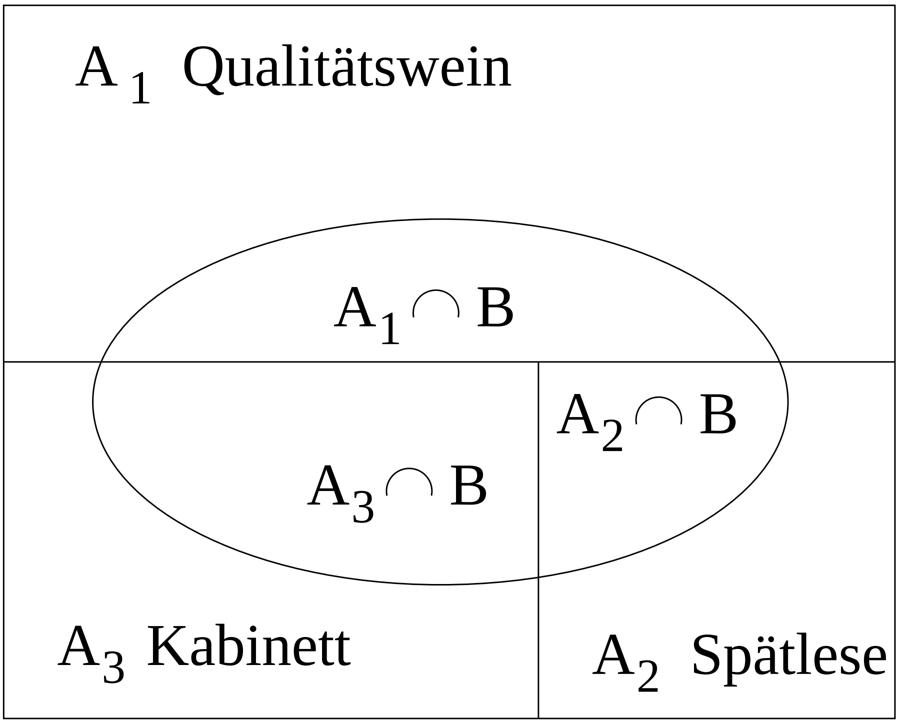
$$A_1 = \{\text{ Qualitätswein }\} \qquad P[A_1] = 0,5$$
$$A_2 = \{\text{ Kabinett }\} \qquad P[A_2] = 0,3$$
$$A_3 = \{\text{ Spätlese }\} \qquad P[A_3] = 0,2$$

$\Rightarrow$ vollständige Zerlegung von S

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$, $A_2 \cap A_3 = \emptyset$,

Frage: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für Ereignis B, eine ausgewählte Flasche ist „Weißwein"?

$$P[B|A_1] = \frac{1}{5}$$
$$P[B|A_2] = \frac{1}{3}$$
$$P[B|A_3] = \frac{1}{4}$$



Vorgehen: $A_1.A_2, A_3$ bilden eine vollständige Zerlegung des Grundraums S

$$\Rightarrow \; B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$$

$$\begin{aligned} P[B] =& P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)] \\ =& P[(B \cap A_1)] + P[(B \cap A_2)] + P[(B \cap A_3)] \\ =& P[B|A_1]\, P[A_1] + P[B|A_2]\, P[A_2] \\ & + P[B|A_3]\, P[A_3] \\ =& \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{10} \\ =& \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Totale Wahrscheinlichkeit

SATZ VON DER TOTALEN WAHRSCHEINLICHKEIT:
Seien $A_1, \ldots, A_k$ *Ereignisse, die eine* ***Zerlegung*** *von* S *bilden, d.h. es gilt:* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, *und* $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = S$.
Dann folgt für ein Ereignis $B \subset S$*:*

$$\begin{aligned} P[B] &= P[A_1 \cap B] + P[A_2 \cap B] + \ldots + P[A_k \cap B] \\ &= \sum_{i=1}^{k} P[A_i \cap B] \\ &= \sum_{i=1}^{k} P[B|A_i] \cdot P[A_i]. \end{aligned}$$

Beispiel: [Weinkeller (Fortsetzung)]

Weitere mögliche Fragestellung:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P[A_1|B]$ dafür, daß eine zufällig ausgewählte Weißweinflasche Qualitätswein ist?

Grundlage: Wir kennen die Wahrscheinlichkeiten

$$P[B|A_i] \text{ und } P[A_i] \; i = 1, \ldots, 3$$

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt:

$$P[A_1 \cap B] = P[A_1|B] \, P[B] = P[B|A_1] \, P[A_1]$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P[A_1|B] &= \frac{P[B|A_1] \, P[A_1]}{P[B]} \\ &= \frac{P[B|A_1] \, P[A_1]}{\sum_{i=1}^{3} P[B|A_i] \, P[A_i]} \\ &= \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Satz von Bayes

[Thomas Bayes, englischer Pastor, Mathematiker, (1702-1761)]

Seien die Vorraussetzungen des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit erfüllt. Dann kann auch nach der Wahrscheinlichkeit von A_i gefragt werden unter der Bedingung, dass B eingetreten ist (*Wahrscheinlichkeit a posteriori*).

Satz von Bayes:

Seien $A_1, \ldots, A_k$ Ereignisse, die eine Zerlegung von S bilden Sei B Ereignis, derart daß $P[B] > 0$. Dann gilt:

$$P[A_j|B] = \frac{P[A_j]P[B|A_j]}{\sum_{i=1}^{k} P[A_i]P[B|A_i]} = \frac{P[A_j]P[B|A_j]}{P[B]}$$

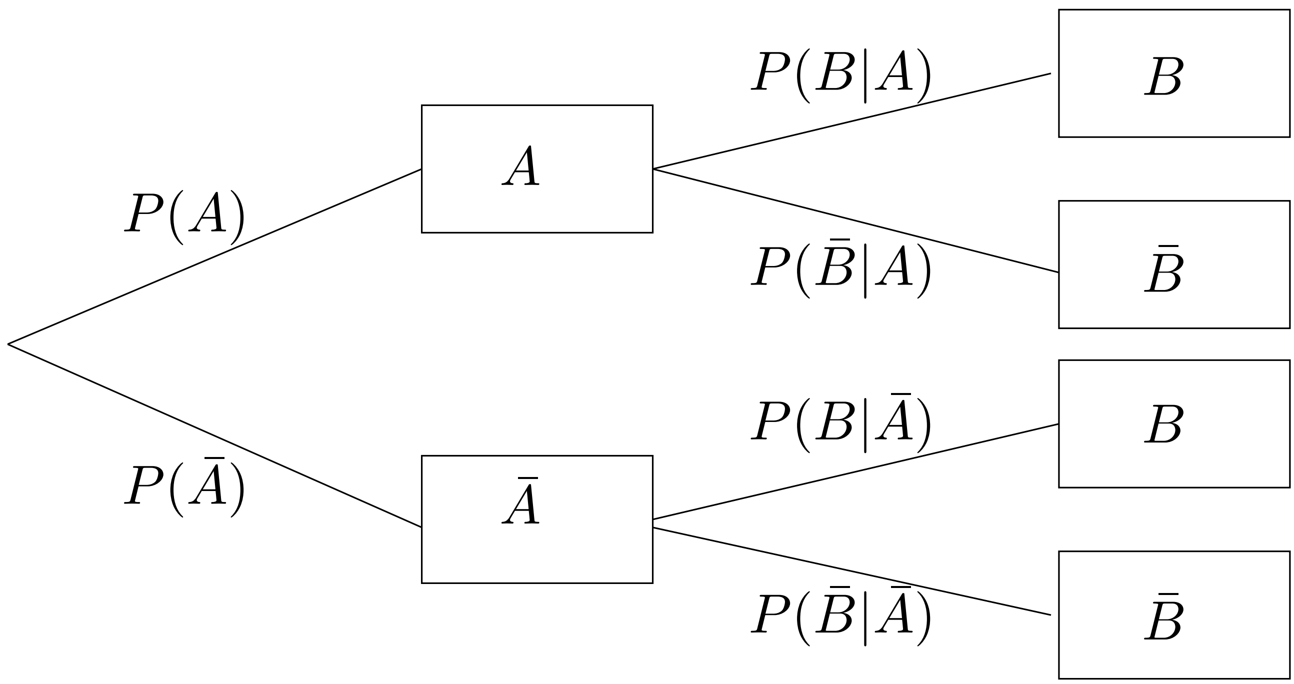
Wir nennen die Wahrscheinlichkeiten

- $P[A_i]$ a-priori Wahrscheinlichkeiten
- $P[A_i|B]$ a-posteriori Wahrscheinlichkeiten

Hilfsmittel bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten: **Baumdiagramm**

Voraussetzung: Vollständige Zerlegung des Ereignisraums

Beispiel: Ereignisse $A, \bar{A}$ und $B, \bar{B}$



zur Kontrolle: Die Wahrscheinlichkeiten, der von einem Punkt des Baumdiagramms ausgehenden Äste, haben stets die Summe 1. Die Summe aller Pfadwahrscheinlichkeiten ist 1.

Pfadregeln:

1) Wird ein Ergebnis durch einen einzelnen Pfad beschrieben, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses (= Pfadwahrscheinlichkeit) gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

2) Setzt sich ein Ereignis aus mehreren Pfaden zusammen, so werden die entsprechenden Pfadwahrscheinlichkeiten addiert.